

Übung Optoelektronik SS2016

Lösungshinweise

July 13, 2016

Aufgabe aus Vorlesung 1 - Absorption im Halbleiter

Bestimmung der Absorptionskonstanten α

Unter Berücksichtigung der Reflektionen an den Grenzflächen ergibt sich für die Intensität am Detektor:

$$I = I_0 \cdot (1 - R)^2 \cdot \exp(-\alpha L)$$

der Reflektionsfaktor ist bei senkrechtem Einfall gegeben durch: $R = \left| \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right|^2$.
Auflösen nach α und einsetzen der Zahlenwerte liefert:

$$\alpha = \frac{-1}{L} \ln \left(\frac{I}{I_0 (1 - R)^2} \right)$$

$$\alpha_{GaAs} \approx 4,48 \cdot 10^4 \text{ cm}^{-1}$$

$$\alpha_{Si} \approx 4,44 \cdot 10^3 \text{ cm}^{-1}$$

Eindringtiefe

Im Halbleiter fällt die Energie exponentiell ab, zu lösen bleibt also:

$$I(L) = I_0 \cdot \exp(-\alpha L) \stackrel{!}{=} I_0 \cdot 0,5$$

$$L_{50\%} = \frac{-1}{\alpha} \ln(0,5) = \frac{1}{\alpha} \ln(2)$$

$$L_{50\%, GaAs} = 155 \text{ nm}$$

$$L_{50\%, Si} = 1558 \text{ nm}$$

Konsequenzen für die Photovoltaik

GaAs als direkter Halbleiter absorbiert deutlich besser bei der gegebenen Wellenlänge als Si (indirekter Halbleiter). Um die gleiche Leistung zu absorbieren, müssen die Si-Wafer/Si-Zellen ca. den Faktor 10 dicker sein, was aufgrund des höheren Materialbedarfs teurer ist und ausserdem die Bauteile unflexibler macht. GaAs kann daher dünnere Photovoltaik-Module begünstigen.

Übung 1

Aufgabe 1 - Vergleich von Strahlungsquellen

Die Intensitäten der jeweiligen Strahlungsquellen können durch die elektrische Leistung der Quelle P , dem Wirkungsgrad η und der (vom Abstand r abhängigen) bestrahlte Fläche errechnet werden:

$$I(r) = \frac{P \cdot \eta}{A(r)}$$

Glühlampe

Eine Glühlampe strahlt isotrop in alle Raumrichtungen. Die optische Leistung verteilt sich daher auf einer Kugelschale. Die Intensitäten ergeben sich daher zu:

$$A(r = 5m) = \frac{P \cdot \eta}{4\pi r^2} = \frac{100W \cdot 0,05}{4\pi(5m)^2} = 16 \frac{mW}{m^2}$$

$$A(r = 200m) = 9,9 \frac{\mu W}{m^2}$$

Laserpointer

Der Laserpointer strahlt stark directional in eine Richtung. Mit dem angegebenen Divergenzwinkel ($\alpha = 1mrad \approx 0,0573^\circ$) kann die angestrahlte Fläche berechnet werden durch $A(r) = \pi \cdot (r \cdot \tan(0,0573^\circ))^2$:

$$A(r = 5m) = \frac{0.001W \cdot 1}{\pi(5 \cdot \tan(0,0573)) ^2} = 12,7 \frac{W}{m^2}$$

$$A(r = 200m) = \frac{0.001W \cdot 1}{\pi(200 \cdot \tan(0,0573)) ^2} = 8 \frac{mW}{m^2}$$

Bemerke: Die Energiedichte des Laserpointers ist um einen Faktor von ca. 800 höher als die der Glühlampe bei gleichem Abstand.

Aufgabe 2 - Antireflexschichtbeschichtungen

a)

Die Wellen, die an den unterschiedlichen Grenzflächen reflektiert werden, sollen destruktiv interferieren. Damit ergibt sich für die Antireflexschicht eine Bedingung für die Schichtdicke d :

$$2d \stackrel{!}{=} \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda_0}{n_{ARS}}$$

n_{ARS} ist hierbei der Brechungsindex der Antireflexschicht. Für eine minimale Schichtdicke, wählen wir $m = 0$. Betrachten wir nur die ersten beiden reflektierten Strahlen, so sollten diese dieselbe Amplitude haben um vollständig destruktiv zu interferieren (dies ist eine starke Vereinfachung, für eine exakte Lösung müssen wir unendlich viele Reflexionen in der Schicht betrachten). Wir setzen also die Reflektionsfaktoren an den beiden Grenzflächen gleich:

$$\left| \frac{n_{GaAs} - n_{ARS}}{n_{GaAs} + n_{ARS}} \right|^2 = \left| \frac{n_{ARS} - n_{Luft}}{n_{ARS} + n_{Luft}} \right|^2$$

Wurzelziehen und auflösen ergibt:

$$n_{ARS} = \sqrt{n_{GaAs} \cdot n_{Luft}}$$

b)

Für die Reflexion an der GaAs Luft zu Grenzfläche ergibt sich ohne Antireflexschicht eine Reflexion von ca. 32%. Der Brechungsindex einer Antireflexschicht und die Dicke sollten sein:

$$n_{ARS} = \sqrt{n_{GaAs} \cdot n_{Luft}} \approx 1,90 \quad d = \frac{\lambda_0}{4n_{ARS}} \approx 105nm$$

c)

Mit gegebener Formel erhält man für SiO₂ eine minimale Reflexion von 4,7% und für TiO₂ von 4,1%. Letzteres sollte daher als Antireflexschicht vorgezogen werden. Die minimale Schichtdicke analog zu obiger Rechnung zu 97,8nm. Der Brechungsindex einer idealen Schicht würde 1,87 betragen. Aufgrund des Herstellungsprozesses ist allerdings in der Regel die Auswahl an Materialien begrenzt.

Verständliche Herleitungen der Reflexionsformel mittels der Transfermatrixmethode sind in z.B. in „Optik für Ingenieure“ von F. Pedrotti, L. Pedrotti, W. Bausch und H. Schmidt (Springer Verlag) oder in „Optik“ von E. Hecht (Oldenburg Verlag) zu finden.

Aufgabe 3 - AR Einfach- und Doppelschicht

a)

Um die optimale Brechungsindexkombination zu finden wählt man den Ansatz:

$$R = \left(\frac{n_3^2 n_1 - n_4 n_2^2}{n_3^2 n_1 + n_4 n_2^2} \right)^2 \stackrel{!}{=} 0$$

Auflösen ergibt direkt die gesuchte Beziehung:

$$n_3^2 n_1 - n_4 n_2^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{n_1}{n_4} = \left(\frac{n_2}{n_3} \right)^2$$

b)

Für die InGaAs-Luft Grenzfläche wäre das ideale Brechungsverhältnis:

$$\frac{n_2}{n_3} = \sqrt{\frac{n_1}{n_4}} = \sqrt{\frac{1}{3,8}} = 0,51$$

Mit den Materialien MgF_2 und CdS kommt man diesem Verhältnis am Nächsten:

$$\frac{n_2}{n_3} = \frac{1,38}{2,60} \approx 0,53$$

Die so erreichbare minimale Reflektion beträgt:

$$R_{min} = \left(\frac{n_3^2 n_1 - n_4 n_2^2}{n_3^2 n_1 + n_4 n_2^2} \right)^2 = \left(\frac{3,6^2 - 3,6 \times 1,38^2}{3,6^2 + 3,6 \times 1,38^2} \right)^2 = 0,001$$

Durch eine Kombination von $\frac{\lambda}{2}$ und $\frac{\lambda}{4}$ -Schichten können auch weniger scharfe, aber breitbandigere reflektionsmindernde Schichten wie in folgender Abbildung hergestellt werden:

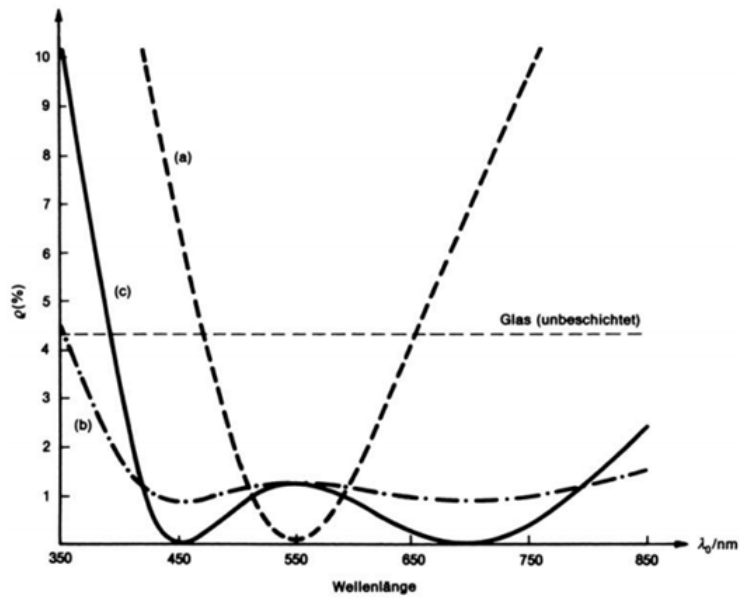
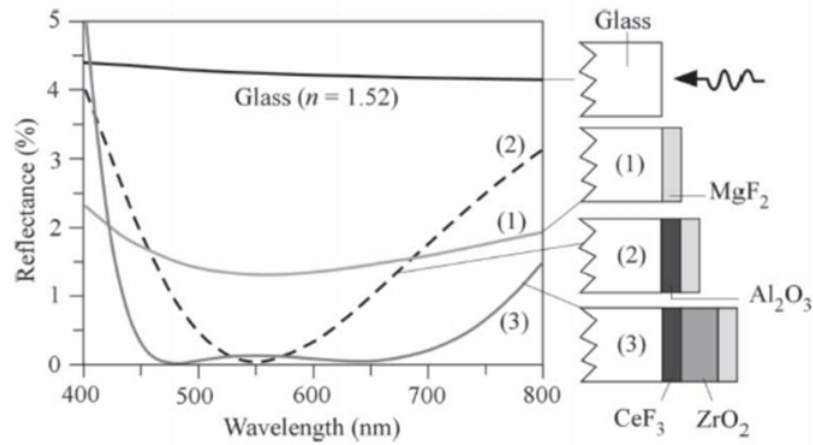


Abb. 19.4. Reflexionsgrad einer Doppelschicht auf Glas als Funktion der Wellenlänge. In allen Fällen ist $n_0 = 1$ (Luft) und $n_s = 1,52$ (Glas). Die nachfolgend angegebenen optischen Dicken ($\lambda_1/4$ bzw. $\lambda_2/2$) beziehen sich auf eine Wellenlänge von $\lambda_0 = 550$ nm: (a) $\lambda/4 - \lambda/4$: $n_1 = 1,65, n_2 = 2,1$. (b) $\lambda/4 - \lambda/2$: $n_1 = 1,38, n_2 = 1,6$. (c) $\lambda/4 - \lambda/2$: $n_1 = 1,38, n_2 = 1,85$

Eine breitbandige und niedrige Reflexion kann z.B. mit einer dreifachen Schichtfolge erreicht werden. Im folgendem Bild ist ein Vergleich von einer einfach, doppelten und dreifach Glas-Antireflexbeschichtung zu sehen:



Aufgabe 4 - Wellenleiter

a)

Der maximale Akzeptanzwinkel kann durch zweimaliges Anwenden des Snelliuschen Brechungsgesetzes hergeleitet werden. Für den steilsten Winkel des Lichtstrahls, der in der Faser noch totalreflektiert wird, gilt:

$$n_1 \sin(90^\circ - \theta_1) = n_2 \sin(90^\circ) = n_2$$

$$\theta_1 = \arccos\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$$

Erneutes Anwenden des Brechungsgesetzes am Luft-Glas Übergang liefert das gesuchte Ergebnis für den maximalen Akzeptanzwinkel θ_0 :

$$n_0 \sin(\theta_0) = n_1 \sin(\theta_1)$$

$$\theta_0 = \arcsin\left(\sqrt{n_1^2 - n_2^2}\right)$$

b)

Lichteinkopplung in eine Faser

Um den in voriger Aufgabe ausgerechneten kritischen Einstrahlwinkel nicht zu übersteigen, muss für die Brennweite gelten:

$$f > \frac{d}{2 \cdot \tan \theta_0} = \frac{d \cdot \sqrt{1 - (n_1^2 - n_2^2)}}{2 \cdot \sqrt{n_1^2 - n_2^2}} = 29 \text{ mm}$$

Aufgabe 5 - Totalreflektion in einer LED

a)

Mit dem Snelliuschen Brechungsgesetz ergibt sich für den Winkel der Totalreflexion an der GaAs-Luft Grenzfläche:

$$\theta_c = \arcsin\left(\frac{1}{n_{\text{GaAs}}}\right) \approx 16^\circ$$

b)

Der Anteil der emittierten Leistung, der in den Raumwinkel emittiert wird, in dem das Licht Austreten kann, erhält man als Verhältnis der entsprechenden Fläche zur Gesamtfläche. Unter Verwendung der Notation in untenstehender Zeichnung und dem kritischen Winkel θ_c kann die Fläche über Integration in Kugelkoordinaten ermittelt werden:

$$A_{\theta_c} = \int_0^{\theta_c} 2\pi r \sin \phi r d\phi = 2\pi r^2 \int_0^{\theta_c} \sin \phi d\phi = 2\pi r^2 (1 - \cos \theta_c)$$

$$\frac{P_{austretend}}{P_{Gesamt}} = \frac{A_{\theta_c}}{A_{Gesamt}} = \frac{2\pi r^2(1 - \cos\theta_c)}{4\pi r^2} = \frac{1}{2}(1 - \cos\theta_c) \approx 0,02 = 2\%$$

(a) Vector diagram showing incident light from a source at angle ϕ_c to the normal $\vec{n}_s$, and the normal $\vec{n}_{\text{air}}$ at angle $\Phi = 90^\circ$.

(b) Differential area element on a hemisphere with radius r , at polar angle ϕ , with area $dA = 2\pi r \sin \phi \, r d\phi$.

(c) Total area of a hemisphere with radius r , $A = 2\pi r^2 (1 - \cos \phi)$.

Source: E.F. Schubert

Fig. 5.3. (a) Definition of the escape cone by the critical angle ϕ_c . (b) Area element dA . (c) Area of calotte defined by radius r and angle ϕ_c .

Aufgabe 1 - Kristallstruktur

$8 \cdot 1/8 + 6 \cdot 1/2 = 4$ Atome je Ga und As sind damit in einer Einheitszelle enthalten.

$$m_{EZ} = 4 \cdot m_{As} + 4 \cdot m_{Ga} = 578,4 u = 9,6 \cdot 10^{-25} kg \Rightarrow a = \sqrt[3]{m_{EZ}} = 5,65 \text{ \AA}.$$

a) Es sollen hier zunächst nur die Elektronen im LB ohne optische Übergänge betrachtet werden. Bei optischen Übergängen wird mit der kombinierten Zustandsdichte von Elektronen und Löchern gerechnet, siehe Übung 3.

$$f(E) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{E - E_F}{kT}\right)} \approx \exp\left(-\frac{E - E_F}{kT}\right) \text{ für } E - E_F \gg kT.$$

Die Elektronenverteilung berechnet sich als Produkt der Besetzungswahrscheinlichkeit und der Zustandsdichte zu

$$N(E) = D(E) \cdot f(E).$$

Im 3D-Volumenhalbleiter gilt die Zustandsdichte für Elektronen im LB:

$$D_c(E) = \frac{(2m_e^*)^{3/2}}{2\pi^2\hbar^3} \sqrt{E - E_c} = c \cdot \sqrt{E - E_c}$$

$$N(E) = c \cdot \sqrt{E - E_c} \cdot \exp\left(-\frac{E - E_F}{kT}\right)$$

Das Maximum ergibt sich durch die Ableitung nach E und nach 0 gleichsetzen:

$$E = E_c + \frac{kT}{2}$$

b) Kleine Änderungen des Zusammenhangs zwischen Wellenlänge und Energie

$$\lambda = \frac{hc}{E_{ph}}$$

lassen sich durch das Differential annähern

$$\frac{\Delta\lambda}{\Delta E} \approx \left| \frac{d\lambda}{dE} \right| = \left| -\frac{hc}{E_{ph}^2} \right|$$

$$\Delta\lambda = \left| -\frac{hc}{E_{ph}^2} \right| \Delta E$$

$$\Delta\lambda = \lambda_0^2 \frac{3k_b T}{hc}$$

Die spektrale Breite berechnet sich damit zu

$$\lambda_0 = 870nm \rightarrow \Delta\lambda = 47nm$$

$$\lambda_0 = 1300nm \rightarrow \Delta\lambda = 105nm$$

$$\lambda_0 = 1550nm \rightarrow \Delta\lambda = 149nm$$

c) Äquivalent zu b) lässt sich der Zusammenhang der Wellenlängenänderung und der Änderung der Temperatur berechnen

$$\frac{d\lambda}{dE_g} = -\frac{hc}{E_{ph}^2}$$

Der Term wird mit $\frac{dE_g}{dT} = -4.5 \cdot 10^{-4} \frac{eV}{K}$ erweitert und führt zu

$$\frac{d\lambda}{dE_g} \frac{dE_g}{dT} = -\frac{hc}{E_{ph}^2} \frac{dE_g}{dT}$$

$$\frac{d\lambda}{dT} = -\frac{hc}{E_{ph}^2} \frac{dE_g}{dT} = 0,277 \frac{nm}{K}$$

Aus der Näherung $\frac{\Delta\lambda}{\Delta E} \approx \left| \frac{d\lambda}{dE} \right|$ folgt erneut

$$\Delta\lambda = \frac{d\lambda}{dT} \Delta T = 2,8 nm$$

Aufgabe 3 - Materialkomposition

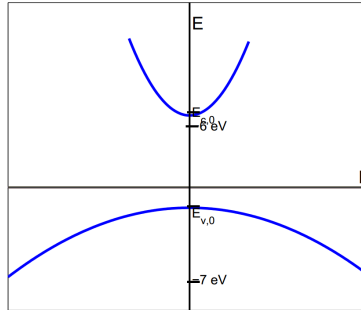
a) Nach $E = \frac{hc}{\lambda}$ entspricht 650nm einer Energie von 1,9eV. Die gegebene lineare Näherung für die Bandlücke wird nach x umgestellt und der Bandlückenenergie gleichgesetzt

$$Al_{0.38}Ga_{0.62}As$$

Ausgehend vom direkten Halbleiter GaAs ($x = 0$) werden einzelne Ga-Atome durch Aluminium ersetzt. AlAs ($x = 1$) dagegen ist ein indirekter Halbleiter. Mit zunehmendem Aluminiumanteil verändert sich die Differenz der direkten und indirekten Bandlücke. Ab ca. $x=0.43$ wird AlGaAs indirekt. Dies lässt sich auch am Diagramm in der Aufgabenstellung ablesen: Kurve 1 beschreibt die direkte Bandlücke, Kurve 2 die indirekte.

Aufgabe 4 - Bandstruktur in $In_{0.53}Ga_{0.47}As$

a) In der Nähe des Leitungsband-Minimums und des Valenzbandmaximum lässt sich die Bandstruktur über die Dispersionsrelation annähern (Parabel). Die effektive Masse ist umgekehrt proportional zur Krümmung der Bänder. Das Leitungsband ist daher stärker gekrümmt als das Valenzband. Leitungsbandminimum bei $E_{c,0}$ und Valenzbandmaximum bei $E_{v,0}$. Beide Bänder werden angenähert durch Parabeln:



b) Die maximale Wellenlänge entspricht der minimalen Energie des Übergangs, also $\Delta E = E_{c,0} - E_{v,0} = 0,762 \text{ eV}$. Dies entspricht einer Wellenlänge von $1,627 \mu\text{m}$.

c) Impuls $p = \hbar k$. Durch einsetzen in die Parabelnäherungen für Leitungs- und Valenzband gilt für die Bandlücke

$$\Delta E = E_{c,0} - E_{v,0} + \frac{p^2}{2} \left(\frac{1}{m_e^*} + \frac{1}{m_h^*} \right) = 1,054 \text{ eV} \rightarrow \lambda = 1,177 \mu\text{m}$$

(Hinweis: in eV umrechnen!) Man beobachtet also eine Blauverschiebung (hin zu höherer Energie).

Aufgabe 5 - Doppelheterostruktur

a) Aus der optischen Leistung, welche der strahlenden Rekombination entspricht, lässt sich die Ladungsträgerdichte n berechnen:

$$P_{opt} = Bn^2 \hbar \omega V \rightarrow n = 2,79 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$$

Mit $n = p$ und der Annahme des stationären Zustands gilt für Generation und Rekombination:

$$\frac{dn}{dt} = g - r = g - An - Bn^2 - Cn^3 = 0 \rightarrow g = An + Bn^2 + Cn^3 = 1,47 \cdot 10^{24} \text{ s}^{-1} \text{ cm}^{-3}$$

Da die Ladungsträger mittels Strom injiziert werden, kann der Strom zu:

$$I = e \cdot g \cdot V = 23,6 \text{ mA}$$

berechnet werden.

b)

Für die Quantenausbeute gilt:

$$\eta = \frac{\text{strahlende Rekombination}}{\text{Summe aller Rekombinationen}} = \frac{Bn^2}{An + Bn^2 + Cn^3} = 5,3\%$$

Übung 3

Aufgabe 1 - Zustandsdichte

Aus dem reziproken Gittervektor $k_0 = 2\pi/L$ folgt der k-Raum für das "Volumen" eines Zustands $V_{\text{ein Zustand}} = (2\pi/L)^3$. Alle Zustände k in einem 3D Halbleiter liegen in dem "Volumen" einer Kugel mit dem Radius k an: $\frac{4}{3}\pi k^3$. Unter Zuhilfenahme der parabolischen Näherung der Energie $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m^*}$ folgt damit für die Anzahl an Zuständen $N(E) = \frac{V_{\text{alle Zustände}}}{V_{\text{ein Zustand}}} = L^3 \frac{(2m^*)^{\frac{3}{2}}}{6\pi^2 \hbar^3} E^{\frac{3}{2}}$.

Um die Zustandsdichte zu erhalten, wird dieser Ausdruck nach der Energie abgeleitet, auf das Volumen des Kristalls normiert und mit dem Faktor 2 multipliziert (aufgrund der zwei möglichen Spineinstellungen des Elektrons).

$$g(E) = 2 \frac{1}{V} \frac{dN}{dE} = \frac{(2m^*)^{\frac{3}{2}}}{2\pi^2 \hbar^3} \sqrt{E}$$

Im 3D-Fall ist die Zustandsdichte also proportional zur Wurzel der Energie. Entsprechend erhält man im 2D-Fall einen konstanten Wert.

Aufgabe 2 - Schichtwellenleiter

Mit der angegebenen Formel und der Näherung, dass $w \gg d$ ist, gilt $\Gamma_y = 1$, somit muss nur noch Γ_x berechnet werden unter Zuhilfenahme von d_0 zu $\Gamma_x = 0,397$.

Die Berechnung des effektiven Brechungsindex erfolgt mit Hilfe der effektiven Indexmethode. Dazu wird der Querschnitt in drei Bereiche eingeteilt (links nach rechts über $n_{eff,I}, n_{eff,II}, n_{eff,III}$) und zunächst der effektive Brechungsindex des transversalen Wellenleiters berechnet. Da sich im Bereich I in x-Richtung kein Brechungsindexübergang befindet, lässt er sich zu $n_{eff,I,III} = n_1 = 3,6$ vereinfachen.

Der Faktor $n_{eff,II}$ wird graphisch über u und b bestimmt:

$$u = k_0 d \sqrt{n_2^2 - n_1^2} = 1,146, \quad k_0 = \frac{2\pi}{\lambda} \rightarrow b \approx 0,2$$
$$n_{eff,II} = \sqrt{b(n_2^2 - n_1^2) + n_1^2} = 3,64$$

Somit ist der Wellenleiter vereinfacht zu einem lateralen Wellenleiter, der transversale Anteil ergibt sich durch $n_{eff,II}$.

Um den effektiven Brechungsindex des gesamten Wellenleiters zu berechnen, wird die gleiche Methode mit allen effektiven Brechungsindizes der jeweiligen Bereiche erneut durchgeführt.

$$u = k_0 w \sqrt{n_{eff,II}^2 - n_{eff,I,III}^2} = 3,38 \rightarrow b \approx 0,7$$

$$n_{eff} = \sqrt{b \left(n_{eff,II}^2 - n_{eff,I,III}^2 \right) + n_{eff,I,III}^2} = 3,62, \beta = n_{eff} k_0 = 2,27 \cdot 10^7 m^{-1}$$

Aufgabe 3 - Single Mode Faser

a) Aus dem b-u-Diagramm (normierte Frequenz vs. Ausbreitungsparameter) folgt für einen radialen Wellenleiter:

$$u = \frac{2\pi}{\lambda} r \sqrt{n_2^2 - n_1^2} \leq 2.405$$

$$r \leq 2.01 \mu m$$

b) Durch Umstellen der Formel nach der Wellenlänge folgt

$$\lambda \geq 1.2 \mu m$$

Aufgabe 4 - Lithographie

a) Aus der Bilanz der benötigten Ladung $A \cdot D = I \cdot t$ folgt die Zeitdauer $t = \frac{A \cdot D}{I} = 50,7h$

b) Unter der Annahme quadratischer Pixel ergibt sich die Pixelanzahl durch $n_{Pix} = \frac{A_{belichtet}}{(100nm)^2} = 9,12 \cdot 10^{11}$. Dieser Wert wird mit der benötigten Zeitdauer pro Pixel multipliziert (bzw. durch die Frequenz geteilt) und ergibt eine Dauer von 25,3h.

Bedenkt man die nötige Ladungsdosis bei gegebenem Strom, so ergibt sich eine gewisse Verweildauer des Elektronenstrahls pro Pixel. Hier wird nämlich vereinfacht angenommen, dass ein Puls ausreicht, um die den Pixel vollständig zu belichten.

c) Die Zahl der nötigen Elektronen ergibt sich über die Ladung zu $n_e = \frac{A \cdot D}{e} = 1,1 \cdot 10^{17}$. Laut Aufgabenstellung ist dieser Wert gleich der Zahl der Photonen. Unter Berücksichtigung der Effizienz und der Tatsache, dass bei der optischen Lithographie die Probe bzw. Maske vollständig belichtet werden muss, muss die Lampe entsprechend $n_{ph} = 2,2 \cdot 10^{18}$ Photonen liefern. Aus der optischen Leistung ergibt sich die Belichtungsdauer zu $t = \frac{E_{ges}}{P_{opt}} = 25ms$.

Aufgabe 5 - Thermisches Verdampfen

- a) Auflösen der gegebenen Gleichung nach p und Einsetzen der Werte ergibt einen Druck von $p = 6,76 \cdot 10^{-8} \text{ mbar}$ (Umrechnung über Pa).
- b) Der Yield (Ausbeute) des Vorgangs lässt sich über die aufgedampfte Fläche berechnen:

$$Y = \frac{A_{Probe}}{A_{ges}} = \frac{9 \cdot 4 \text{ cm}^2}{\pi r^2}$$

Die Gesamtfläche wird über die Kreisfläche des Verdampfungskegels berechnet zu $r = h \cdot \tan\theta$. $\Rightarrow Y = 3,46\%$

- c) Zur Berechnung des Wertes des Goldes wird berechnet, welches Volumen an Material aufgedampft wird und die Masse entsprechend der Dichte berechnet.

$$V_{dampf} = 30 \text{ nm} \cdot A_{ges} = 3,12 \cdot 10^{-9} \text{ m}^3$$

$$V_{vordampf} = 120 \text{ s} \cdot 0,05 \frac{\text{nm}}{\text{s}} \cdot A_{ges} = 0,624 \cdot 10^{-9} \text{ m}^3$$

$$m_{ges} = (V_{dampf} + V_{vordampf}) \rho_{Au} = 72,3 \text{ mg}$$

Dies entspricht bei einem Goldpreis von 50\$ pro Gramm einem Wert von 3,62\$, wovon ein Wert von 0,13\$ auf der Probe landet.

Übung 4

Aufgabe 1 - Weiße LED I

Für das Anzahlverhältnis der Photonen vor Absorption durch den Phosphor, gilt: $m_1 + m_2 = 1$. Somit ergibt sich:

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{m_2 \cdot \eta_2 \cdot h \frac{c}{\lambda_2}}{m_1 \cdot h \frac{c}{\lambda_1}} = \frac{(1 - m_1) \cdot \eta_2 \cdot \lambda_1}{m_1 \cdot \lambda_2} \stackrel{!}{=} 2$$

$$m_1 = \frac{\eta_2 \lambda_1}{2\lambda_2 + \eta_2 \lambda_1} = 0,237$$

Die Ausgangsleistung P_{out} lässt sich somit in abhängig von der Eingangsleistung P_0 schreiben als:

$$P_{out} = P_0 \eta_1 m_1 + \eta_2 \frac{\lambda_1}{\lambda_2} P_0 \eta_1 m_2$$

Für den Gesamtwirkungsgrad η_{ges} ergibt sich damit:

$$\eta_{ges} = \frac{P_{out}}{P_0} = \eta_1 m_1 + \eta_1 \eta_2 (1 - m_1) \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = 0,213 = 12,3\%$$

Aufgabe 2 - Weiße LED II

a) Die komplementären Wellenlängen lassen sich durch das CIE Farbdigramm bestimmen:

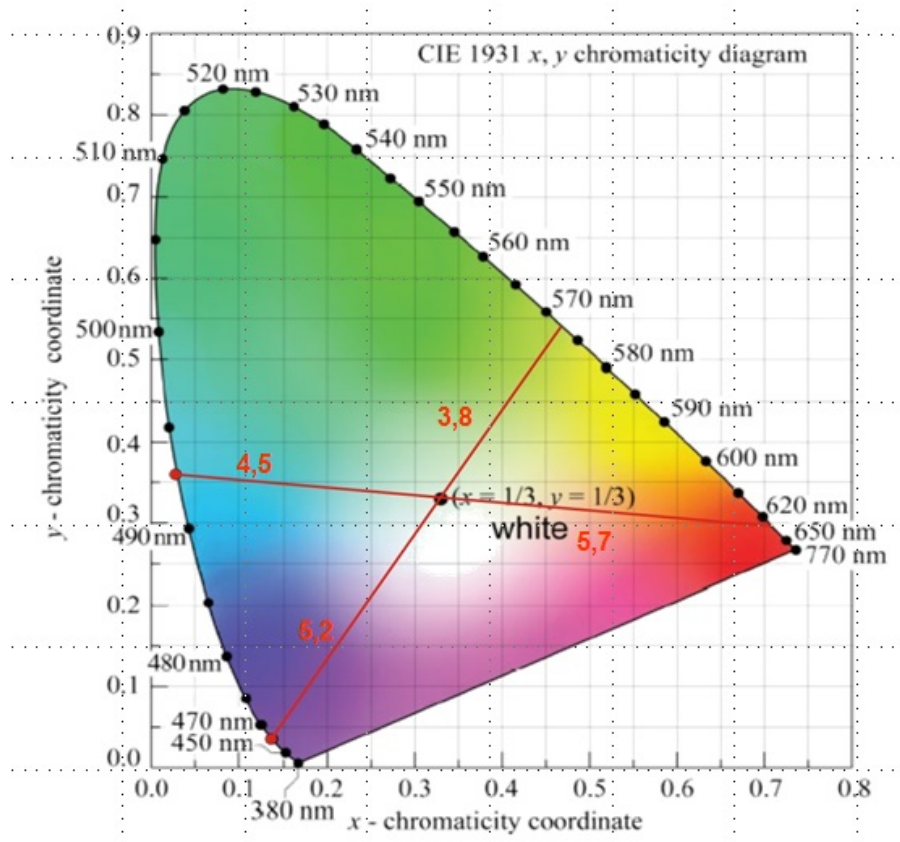


Figure 1: Komplementäre Wellenlängen zur Realisierung von Weißlicht LEDs.

Durch Ablesen aus dem Diagramm erhält man:

$$\lambda_{460nm, komplementär} = 573nm$$

$$\lambda_{492,5nm, komplementär} = 630nm$$

b) Abmessen der Abstände in obiger Zeichnung ergibt:

$$\frac{I_{460nm}}{I_{573nm}} \stackrel{!}{=} \frac{3,8}{5,2} = 0,73$$

$$\frac{I_{492,5nm}}{I_{630nm}} \stackrel{!}{=} \frac{5,7}{4,5} = 1,27$$

c) Durch das in b) bestimmte Verhältnis ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 P_{460nm} + P_{573nm} &= 1,73 P_{573nm} \stackrel{!}{=} 1W \\
 \implies P_{573nm} &= 578mW; \quad P_{460nm} = 427mW \\
 \implies P_{492,5nm} &= 441mW; \quad P_{492,5nm} = 559mW
 \end{aligned}$$

d) Ablesen aus der $V(\lambda)$ Kurve ergibt die folgenden Empfindlichkeiten:

$$\eta_{460nm} = 41 \frac{lm}{W}$$

$$\eta_{492,5nm} = 157 \frac{lm}{W}$$

$$\eta_{573nm} = 642 \frac{lm}{W}$$

$$\eta_{630nm} = 184 \frac{lm}{W}$$

Die Lichtausbeute ergibt sich aus den jeweiligen Intensitäten multipliziert mit den Empfindlichkeiten:

$$\phi_{LED1} = \eta_{460nm} \cdot P_{460nm} + \eta_{573nm} \cdot P_{573nm} = 389lm$$

$$\phi_{LED2} = \eta_{492,5nm} \cdot P_{492,5nm} + \eta_{630nm} \cdot P_{630nm} = 169lm$$

e) Der Emitter mit $\lambda = 573nm$ liegt sehr nahe am Maximum der Hellempfindlichkeit des Auges. Daraus resultiert die deutlich höhere Lichtausbeute.

Aufgabe 3 - Spektren und Farbräume (an-)organischer LEDs

a) Spektren der beiden LEDs:

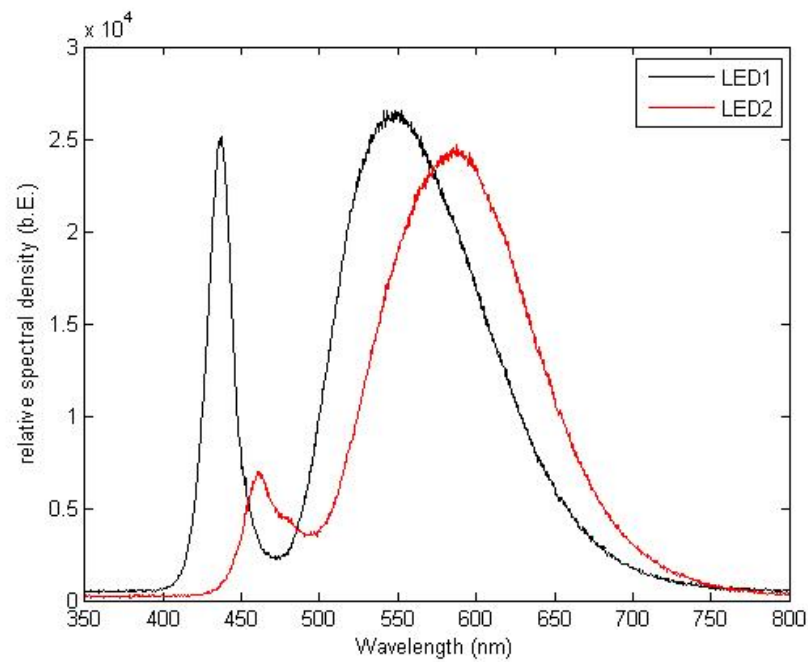
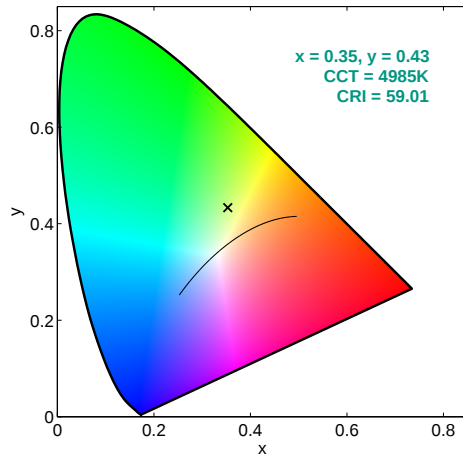
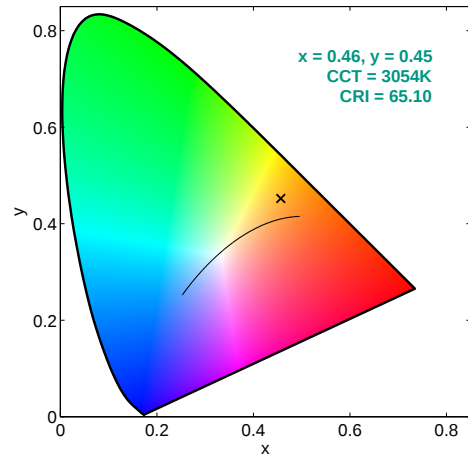


Figure 2: Spektrum einer kalten und warmen LED. LEDs mit hohem Blauanteil und hoher Farbtemperatur werden auch als kaltweiße LEDs bezeichnet. LEDs mit höherem gelb-orange Anteil und niedrigerer Farbtemperatur dagegen als Kaltweiß.

b) Mit Spectrasis erzeugte Darstellungen:



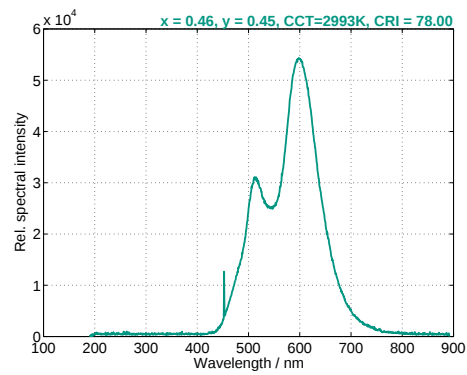
(a) LED1



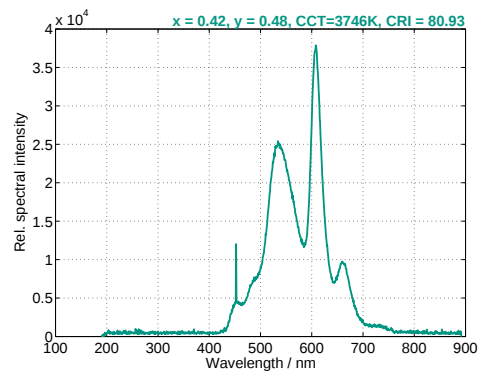
(b) LED2

Figure 3: x-y Farbdigramme der beiden LEDs.

c) Spektren der OLEDs und Farbräume der OLEDs:



(a) OLED1



(b) OLED2

Figure 4: Spektren der OLEDs

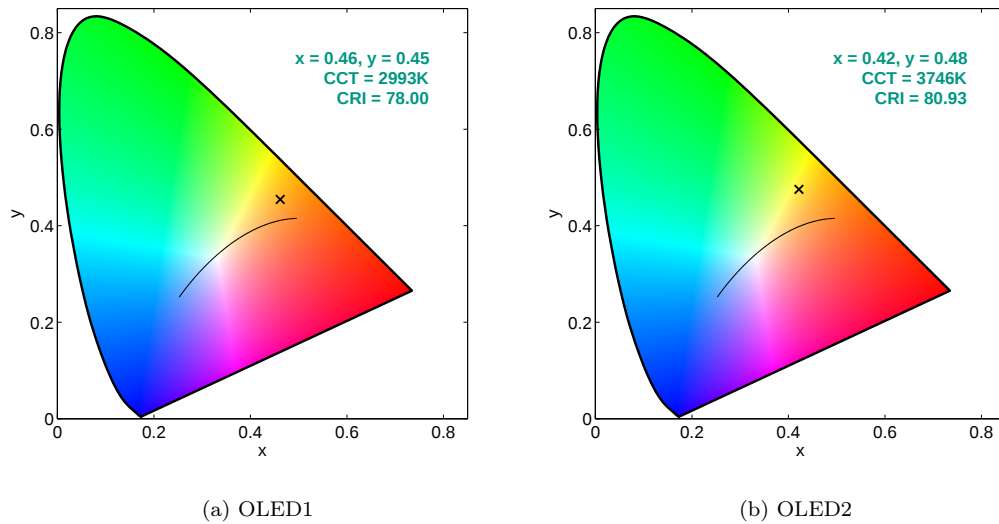


Figure 5: Spektren der OLEDs

Aufgabe 4 - Wirtschaftlichkeit von Leuchtmitteln

Durch die angenommenen Werte errechnen sich die Stromkosten durch Multiplikation der Betriebsstunden mit dem Energieverbrauch und dem Strompreis. Man beachte, dass aufgrund der kurzen Lebensdauer der Halogenlampe insgesamt 4 Stück benötigt werden. Somit erhält man:

	Anschaffungskosten	Stromkosten	Gesamtkosten
Halogenlampe	6,00 €	83,95 €	89,95 €
Energiesparlampe	5,00 €	20,08 €	25,08 €
LED	7,00 €	16,43 €	23,43 €

Figure 6: Vergleich der Wirtschaftlichkeit von Leuchtmitteln

Übung 5

Aufgabe 1 - HL-Heterojunction

a) Eine Heterojunction verbessert die Leistung z.B. aufgrund des Ladungsträgerconfinements in einer kleinen aktiven Region. Zudem wird die Diffusion freier Ladungsträger über die aktive Region hinaus verhindert.

b) Ladungsträger-Verlustmechanismen in einer pn-Heterostruktur-LED

- Thermische Emission von Ladungsträgern
- Ladungsträger nicht in aktiver Zone “gefangen”
- Bei hohen Stromdichten ist die aktive Region “überfüllt”

c) Unterschied zwischen Doppel-Heterostruktur-LEDs und Einzel-Quantum-Well LEDs:

- DH-LED: relativ dicker QW (>100 nm)
- SQW-LED: relativ dünner QW (5..10 nm)
- Niedrige Injektion: η bestimmt durch nicht-strahlende Rekombination $\Rightarrow$ SQW-LED besser, da weniger Defektzustände wechselwirken können
- Hohe Injektion: η bestimmt durch Stromüberschuss (current overflow) $\Rightarrow$ DH-LED besser, da aktive Zone nicht so schnell “überfüllt”

Aufgabe 2 - Linienverbreiterung optischer Übergänge

a) Um die Linienformfunktion einer homogen verbreiterten Linie $g(\nu)$ zu finden, werden wir ein klassisches Beispiel untersuchen. Die spontane Emission kann durch ein plötzlich emittiertes elektrisches Feld beschrieben werden, das mit der Resonanz $\omega_0 = h\nu_0 = E_2 - E_1$ oszilliert, wobei die exponentiell abfallende Amplitude eine Zeitkonstante von 2τ hat (die Zeitkonstante τ entspricht der Intensität $I \propto E^2$):

$$E(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ E_0 e^{i\omega_0 t} e^{-\frac{t}{2\tau}} & t > 0 \end{cases}$$

Die spektralen Komponenten sind durch die Fouriertransformation gegeben:

$$E(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} E(t) e^{-i2\pi\nu t} dt$$
$$E(\nu) = E_0 \int_0^{\infty} e^{-i2\pi(\nu_0 - \nu - \frac{1}{i4\pi\tau})t} dt$$

$$E(\nu) = E_0 \left[\frac{e^{-i2\pi(\nu_0 - \nu - \frac{1}{i4\pi\tau})t}}{i2\pi(\nu_0 - \nu - \frac{1}{i4\pi\tau})} \right]_0^\infty$$

$$E(\nu) = \frac{E_0}{i2\pi} \left[\frac{1}{(\nu - \nu_0) + \frac{1}{i4\pi\tau}} \right]$$

$$I(\nu) \propto |E|^2 \propto \frac{1}{(\nu - \nu_0)^2 + \frac{1}{(4\pi\tau)^2}} = \frac{1}{(\nu - \nu_0)^2 + \left(\frac{\Delta\nu}{2}\right)^2}$$

Dies ist die Gleichung einer Lorentzkurve mit der Breite $\Delta\nu = \frac{1}{2\pi\tau}$.

b) Homogene Verbreiterungen nehmen die Form einer Lorentzkurve an. Ein weiteres Beispiel dafür ist die Stoßverbreiterung im Festkörper.

Inhomogene Verbreiterungen nehmen die Form einer Gauß-Kurve an. Beispiele: Amorphes Gitter, Stark-Effekt durch Dotierungen.

c) Bei mehreren homogenen Verbreiterungen entsteht eine weitere Lorentzkurve mit der Gesamtbreite: $\Delta\nu_{ges} = \sum_i \Delta\nu_i$.

Bei mehreren inhomogenen Verbreiterungen addieren sich die Kurven zu einer neuen Gauß-kurve der Breite $\Delta\nu = \sqrt{\Delta\nu_1^2 + \Delta\nu_2^2}$.

Eine Kombination von homogenen sowie inhomogenen Verbreiterungsmechanismen muss mit einer Faltung berechnet werden und resultiert in einem Voigt Profil. Vergleich der drei folgenden Kurvenformen ist in Abbildung 7 ersichtlich:

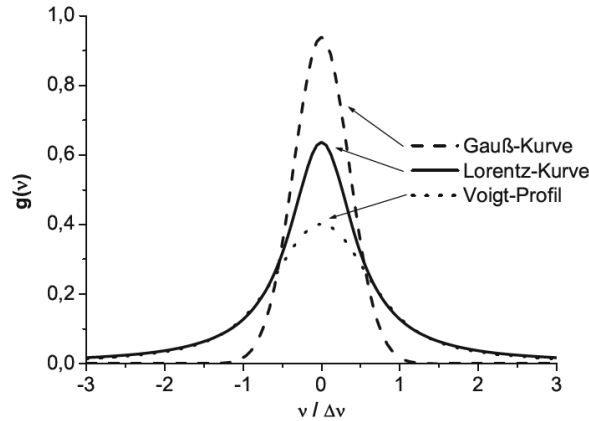


Figure 7: Elementare Lorentz- und Gauß-Linienformfunktion und ihre Faltung, die Voigt- Funktion.

Aufgabe 3 - LED Thermomanagment I

Zuerst berechnet man die Wärmeleistung der LED: $P_{Wärme} = P_{ges} - P_{Licht} = P_{ges} - P_{ges}\eta_{ges}$.

Der Gesamtwirkungsgrad η_{ges} ergibt sich über Multiplikation der Wirkungsgrade der Teilprozesse (siehe Folie OE6.12 der Vorlesung für typische Werte einer LED): $\eta_{ges} = \eta_{el} \cdot \eta_{IQE} \cdot \eta_{Ext} \cdot \eta_{Gehäuse} = 0.9 \cdot 0.71 \cdot 0.75 \cdot 0.9 = 0.43$

Somit ergibt sich die mit der Gesamtleistung $P_{ges} = U \cdot I = 1,12W$ eine Lichtleistung von $P_{Licht} = 482mW$ und Wärmeleistung $P_{Wärme} = 638mW$. Für die Wärmeleistung ergibt sich somit:

$$\text{Wärmeleistungsdichte LED} = \frac{\text{Wärmeleistung}}{\text{aktive Fläche}} = \frac{638mW}{(0.1cm)^2} = 63,8 \frac{W}{cm^2}$$

Für weiße Phosphor-LEDs treten weitere Verluste durch den Phosphor auf, sodass die Wärmeleistungsdichte noch höher wird. Zudem sind die Extraktionseffizienzen in der Regel geringer. Auch ist eine Farbortstabilisierung aufgrund der unterschiedlichen Alterung bzw. eines Temperaturdrifts notwendig.

Aufgabe 4 - LED Thermomanagment II

a) Durch die Angabe des Stroms und der EQE können wir die Anzahl der emittierten Photonen pro Zeiteinheit berechnen: $N_{\text{photonen}} = \frac{I}{e} \eta_{EQE} = 6.25 \cdot 10^{17} \frac{1}{s}$. Damit ergibt sich für die emittierte optische Leistung:

$$P_{Licht} = N_{\text{Photonen}} \frac{hc}{\lambda} = 270mW$$

b) Energie der Bandlücke: $E_{\text{photon}} = 2., eV$

$$P_{\text{Serienwiderstand}} = I(V_f - E_{\text{photon}}/e) = 3,15W$$

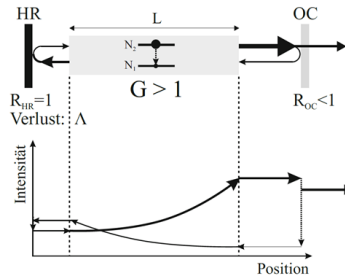
$$P_{\text{nicht-strahlend}} = P_{ges} - P_{Licht} - P_{\text{Serienwiderstand}} = 1,08W$$

$$c) P_{\text{thermisch}} = P_{\text{Serienwiderstand}} + P_{\text{nicht-strahlend}} = 4,23W$$

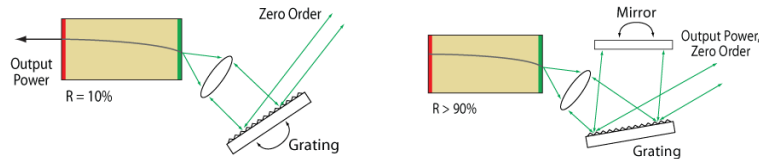
$$d) \Delta T = 25K/W \cdot 4,23W = 105,75K$$

$$\Rightarrow T = 20^\circ C + 105,75K = 125,75^\circ C$$

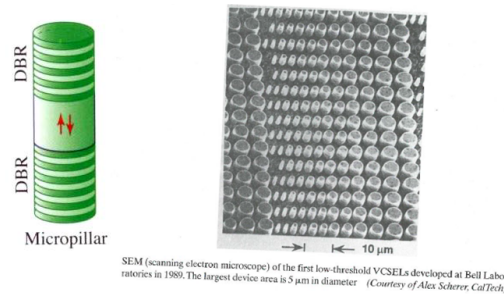
Aufgabe 5 - Rückkopplungsmechanismen in Lasern



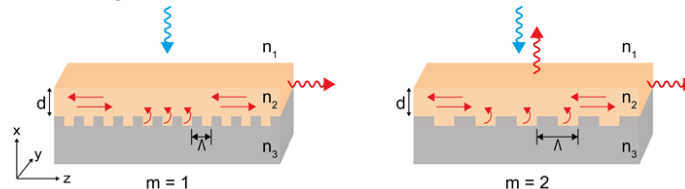
(a) Im Fabry-Perot Resonator zirkuliert das Licht zwischen zwei Spiegeln. Die Resonanzbedingung lautet: $m \cdot \lambda = 2 \cdot n \cdot L$.



(b) In einem External Cavity Resonator wird Licht auf der einen Seite durch ein Spiegel, auf der anderen Seite durch ein Gitter rückgekoppelt. Dadurch kann eine Welllängendurchstimmung erreicht werden. Rechts: Littrow Konfiguration. Links: Littman-Metcalf Konfiguration.



(c) Ein typischer VCSEL besteht aus einer aktiven Schicht, oben und unten umgeben von einer Vielzahl an hoch-niederbrechenden Schichten, die als Bragg-Spiegeln fungieren.



(d) Beim einem Distributed Feedback Laser wird die Rückkopplung durch Bragg-Streuung erzielt. Die Resonanzwellenlänge ergibt sich über die Formel: $\lambda_{Bragg} \approx 2 \cdot \Lambda \cdot n_{eff} / m$, mit der Streuordnung m . Ein DFB Laser erster Ordnung ($m=1$) ist ein Kantenemitter, während ein DFB Laser zweiter Ordnung ($m=2$) zur Kante und senkrecht zur Oberfläche Licht emittiert.

Aufgabe 6 - Abstand longitudinaler Moden

a) Resonanzbedingung für konstruktive Interferenz zwischen den Spiegeln:

$$L = m \cdot \frac{\lambda}{2 \cdot n}$$

Umstellen der Resonanzbedingung Ableiten nach der Wellenlänge (erlaubt, da m sehr groß) ergibt mit $\Delta m = 1$:

$$\Delta \lambda = \frac{\lambda^2}{2L \left(n - \lambda \frac{\partial n}{\partial \lambda} \right)}$$

b) $n = \text{konstant}$ ist $\Delta \lambda = \frac{\lambda^2}{2nL} = 0,36 \text{ nm}$

c) Aus b) ergibt sich: L sehr klein $\rightarrow \Delta \lambda$ sehr groß. Damit lassen sich einzelne Moden leichter unterscheiden und selektieren.

Übung 6

Aufgabe 1 - Temperaturbedingter Laserwellenlängenshift

Ableiten der Resonanzbedingung nach der Temperatur führt zur gesuchten Bedingung:

$$\frac{d\lambda_m}{dT} = \frac{d}{dt} \left[\frac{2nL}{m} \right] \approx \frac{2L}{m} \frac{dn}{dT}$$

mit $\frac{L}{m} = \frac{\lambda_m}{2n_0}$ ergibt sich:

$$\frac{d\lambda_m}{dT} \approx \frac{\lambda_m}{n_0} \frac{dn}{dT} = 0.035 \frac{\text{nm}}{\text{K}}$$

Aufgabe 2 - Laserdiode

a) $L = m \cdot \frac{\lambda_0}{2 \cdot n_{HL}}$. Übergang zu kontinuierlichem m und Ableiten nach λ_0 des nach m aufgelösten Ausdrucks ergibt $L = \left| \frac{\lambda_0^2 \frac{\Delta m}{\Delta \lambda_0}}{2 \cdot n_{HL}} \right|$.

Mit den abgelesenen Werten $m = 12$ und $\lambda_0 = 8 \text{ nm}$ folgt $L = 373 \mu\text{m}$.

b) Die absolute externe Quantenausbeute ist hier definiert als der Quotient der emittierten Photonen durch die injizierten Elektronen:

$$\eta_{abs} = \frac{\text{Anzahl Photonen pro Zeit}}{\text{Anzahl Elektronen pro Zeit}} = \frac{\dot{n}_{ph}}{\dot{n}_{el}} = \frac{\frac{P}{\hbar\omega}}{\frac{I}{e}} = \frac{e}{\hbar\omega} \cdot \frac{P}{I}$$

Und die differenzielle Quantenausbeute als die Anzahl der zusätzlich emittierten Photonen pro zusätzlich injektierter Elektronen überhalb der Laserschwelle:

$$\eta_{diff} = \frac{e}{\hbar\omega} \frac{\partial P}{\partial I}$$

$$\frac{e}{\hbar\omega} = \frac{e\lambda}{hc} = \frac{1,602 \cdot 10^{-19} C \cdot 1,3 \cdot 10^{-6} m}{6,626 \cdot 10^{-34} Js \cdot 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}} = 1,048 \frac{A}{W}$$

$$\text{Ablesen aus dem Diagramm: } \frac{\partial P}{\partial I} = \frac{150 \mu W}{10 mA} = 15 \frac{mW}{A}$$

$$\frac{P}{I} = \frac{150 \mu W}{50 mA} = 3 \frac{mW}{A}$$

Somit ergibt sich:

$$\eta_{abs} = 0,0031 = 0,31\%$$

$$\eta_{diff} = 0,0157 = 1,57\%$$

Aufgabe 3 - Photonenlebensdauer im Laser

Die Photonenlebensdauer in einem Resonator kann geschrieben werden als $\tau = \frac{n}{\alpha_{ges} c_0}$ mit dem Resonatorverlustkoeffizient $\alpha_{ges} = \alpha_i + \alpha_{Spiegel}$. Der Spiegelverlustkoeffizient definiert sich über die Reflektionsverluste bei einem Umlauf):

$$E_{i+1} = E_i \sqrt{R_1} \sqrt{R_2} = E_i e^{-2\alpha_{Spiegel} L} \implies \alpha_{Spiegel} = \frac{1}{2L} \ln \left(\frac{1}{\sqrt{R_1 R_2}} \right)$$

$$\text{a) } \tau = 4 \cdot 10^{-12} s$$

$$\text{b) } \tau = 6 \cdot 10^{-12} s$$

$$\text{c) } \tau = 7,8 \cdot 10^{-12} s$$

Aufgabe 4 - GaAs Single Quantum Well Laser

Der energetische Abstand ergibt sich als Summe der Bandlückenenergie und der Confinement Energien für Elektronen und Löcher:

$$\Delta E = E_g + \frac{\hbar^2}{2m_e^*} \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 + \frac{\hbar^2}{2m_{hh}^*} \left(\frac{\pi}{L} \right)^2$$

Umgestellt nach L:

$$L^2 = \pi^2 \frac{m_e^* + m_{hh}^*}{2m_e^* m_{hh}^*} \cdot \frac{\hbar^2}{\Delta E - E_g} \implies L \approx 5,70 nm$$

Aufgabe 5 - Verstärkung in Schichtwellenleiter

a) Die modale Nettoverstärkung ist gegeben durch:

$$g_m = \Gamma g = \Gamma_y a (n - n_{tr})$$

Die zeitl. Änderung der Ladungsträgerdichte n ist im Betrieb konstant. Daher können wir folgenden Ansatz wählen:

$$\frac{dn}{dt} = -\frac{n}{\tau_n} + \frac{I}{ewdL} \stackrel{!}{=} 0$$

$$n = \frac{I\tau_n}{ewdL}$$

Einsetzen in die erste Gleichung ergibt folgenden modalen gain:

$$g_m = \frac{1}{1 + \left(\frac{d_0}{d}\right)^2} \cdot a \cdot \left(\frac{I\tau_n}{ewd_0L} - n_{tr}\right)$$

Der modale gain als Funktion der Schichtdicke ist in folgender Grafik dargestellt:

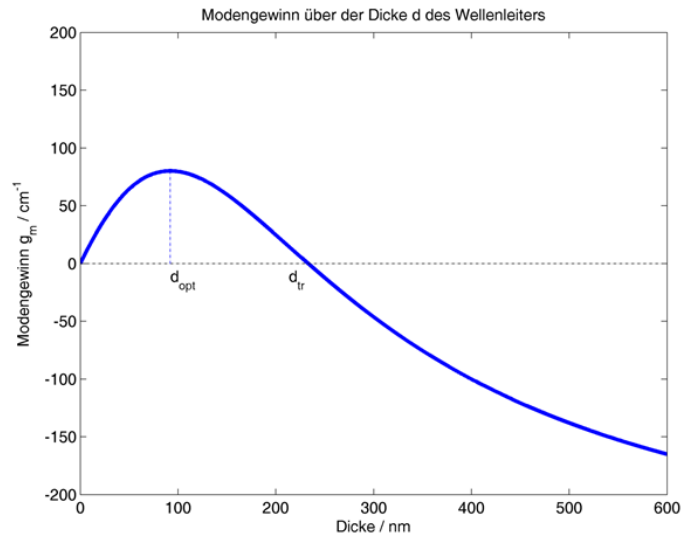


Figure 8: Modengewinn als Funktion der Dicke d

b) Die maximale Nettoverstärkung erhalten wir durch die Ableitung nach der Schichtdicke:

$$\frac{dg_m(d)}{dd} \stackrel{!}{=} 0$$

Auflösen nach d ergibt:

$$d_{1/2} = -\frac{d_0^2 n_{tr} ewL}{I\tau_n} \pm \sqrt{\frac{d_0^4 n_{tr}^2 (ewL)^2}{I^2 \tau_n^2} + d_0^2}$$

Die positive Lösung ergibt dann die gesuchte Dicke für den maximalen modalen Gain:

$$d_{opt} \approx 92,2nm$$

c) Für eine Schichtdicke von 120nm ergibt sich mit der Formel aus Teil a) ein gain von $g_m = 75,31cm^{-1}$. Die Modenverstärkung des gesamten Wellenleiters ergibt sich dann zu:

$$G_m = e^{g_m L} = 20,34$$